آموزشی

علی‌یار کریمی شهمارآوندی
دبیر ریاضی دبیرستان‌های شهرستان اردل

تعبیر هندسی میانگین‌ها

اشاره

می‌گویند در عصر فیثاغورس سه نوع میانگین تعریف شده بود که عبارت بودند از: حسابی، هندسی و مخالف که نام اخیر بعدها توسط آرخوس وهیپاسوس به میانگین توافقی تغییر یافت. این سه نوع میانگین کاربردهای زیادی در شاخه‌های متفاوت ریاضیات به‌ویژه جبر و هندسه دارند. در این مقاله ابتدا هر یک از آن‌ها را به روش جبری تعریف می‌کنیم و سپس رابطهٔ هندسی آن‌ها را از روی یک شکل واحد به‌دست می‌آوریم. آن‌گاه رابطهٔ بین سه میانگین را، هم به روش جبری و هم به روش هندسی، بیان و اثبات می‌کنیم. لازم به توضیح است، طول پاره‌خط‌ها و عددهای به‌کار رفته در این مقاله حقیقی و مثبت هستند.

تعریف جبری میانگین‌ها

میانگین حسابی: هرگاه سه عدد حقیقی a، b و c با یکدیگر یک دنبالهٔ حسابی تشکیل دهند، b را میانگین یا واسطهٔ حسابی a و c می‌نامند و از آنجا به سادگی ثابت می‌شود که: $b=\frac{a+c}{۲}$. پس میانگین حسابی دو عدد در واقع معدل آن‌هاست.

میانگین هندسی: هرگاه سه عدد حقیقی a، b و c با یکدیگر دنبالهٔ هندسی تشکیل دهند، b را میانگین یا واسطهٔ هندسی a و c می‌نامند و از آنجا به سادگی ثابت می‌شود که: $b=\sqrt{ac}$. پس میانگین هندسی دو عدد، جذر حاصل‌ضرب آن‌هاست.

میانگین توافقی (هم‌ساز): هرگاه معکوس‌های چند عدد حقیقی یک دنبالهٔ حسابی تشکیل دهند، خود آن‌ها نیز یک دنبالهٔ هم‌ساز (توافقی) تشکیل می‌دهند. مثلاً دنبالهٔ زیر یک دنبالهٔ هم‌ساز است:

$$\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۵},\frac{۱}{۸},\frac{۱}{۱۱},...$$

زیرا دنبالهٔ ...,۲,۵,۸,۱۱ یک دنبالهٔ حسابی است. بنابراین اگر a، b و c یک دنبالهٔ هم‌ساز تشکیل دهند، b را واسطهٔ توافقی (هم‌ساز) a و c می‌نامیم. در این صورت طبق تعریف $\frac{۱}{a}$ و $\frac{۱}{b}$ و $\frac{۱}{c}$ تشکیل یک دنبالهٔ حسابی می‌دهند و از آنجا داریم:

$$\frac{۲}{b}=\frac{۱}{a}+\frac{۱}{c}\Rightarrow b=\frac{۲}{\frac{۱}{a}+\frac{۱}{c}}$$

پس به‌طور خلاصه، اگر a و b دو عدد حقیقی باشند، میانگین حسابی آن‌ها $\frac{a+b}{۲}$، میانگین هندسی آن‌ها $\sqrt{ab}$ و میانگین هم‌ساز (توافقی) آن‌ها $\frac{۲}{\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}}$ است.

مثال: اگر a=۲ و b=۴ باشد، میانگین حسابی، هندسی و هم‌ساز آن‌ها برابر است با:

$$\text{میانگین حسابی}=\frac{۲+۴}{۲}=\frac{۶}{۲}=۳$$

$$\text{میانگین هندسی}=\sqrt{۲\times۴}=\sqrt{۸}=۲\sqrt{۲}$$

$$\text{میانگین هم‌ساز}=\frac{۲}{\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۴}}=\frac{۲}{\frac{۳}{۴}}=\frac{۸}{۳}$$

نکتهٔ ۱. اگر a=b باشد، میانگین حسابی، هندسی و هم‌ساز برابر یکی از آن‌هاست؛ یعنی:

$$\text{میانگین حسابی}=\frac{a+a}{۲}=\frac{b+b}{۲}=a\ \text{یا}\ b$$

$$\text{میانگین هندسی}=\sqrt{a^۲}=\sqrt{b^۲}=a\ \text{یا}\ b$$

$$\text{میانگین هم‌ساز}\ \frac{۲}{\frac{۱}{a}+\frac{۱}{a}}=\frac{۲}{\frac{۱}{b}+\frac{۱}{b}}=a\ \text{یا}\ b$$

نکتهٔ ۲. (رابطهٔ جبری بین میانگین‌ها): برای هر دو عدد حقیقی و مثبت a و b نشان می‌دهیم، رابطهٔ زیر بین میانگین‌ها برقرار است.

$$\frac{a+b}{۲}\geq\sqrt{a.b}\geq\frac{۲}{\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}}$$

ابتدا نشان می‌دهیم میانگین حسابی از میانگین هندسی کمتر نیست:

$$(\sqrt{a}-\sqrt{b})^۲\geq ۰\Rightarrow a+b-۲\sqrt{ab}\geq ۰$$

$$\Rightarrow a+b\geq ۲\sqrt{ab}\Rightarrow\frac{a+b}{۲}\geq\sqrt{a.b}\quad(۱)$$

حال نشان می‌دهیم میانگین هندسی از میانگین هم‌ساز کمتر نیست:

$$a>۰\Rightarrow \frac{۱}{a}>۰,\quad b>۰\Rightarrow \frac{۱}{b}>۰ \Rightarrow \frac{\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}}{۲}\ge\sqrt{\frac{۱}{a}\times\frac{۱}{b}}\Rightarrow \frac{\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}}{۲}\ge\frac{۱}{\sqrt{a.b}}$$

$$\Rightarrow \frac{۲}{\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}}\le\sqrt{a.b}\quad (۲)$$

(توجه: تساوی زمانی رخ می‌دهد که a=b باشد.)

$$(۱),(۲)\Rightarrow \frac{a+b}{۲}\ge\sqrt{a.b}\ge\frac{۲}{\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}}$$

نکتهٔ ۳. (تعمیم جبری میانگین): در حالت کلی اگر $a_۱$، $a_۲$، ... و a_n اعداد حقیقی باشند، $\frac{a_۱+a_۲+...+a_n}{n}$ را میانگین حسابی، $\sqrt[n]{a_۱\cdot a_۲\cdot...\cdot a_n}$ را میانگین هندسی و $\frac{n}{\frac{۱}{a_۱}+\frac{۱}{a_۲}+...+\frac{۱}{a_n}}$ را میانگین هم‌ساز بین آن‌ها تعریف می‌کنند.

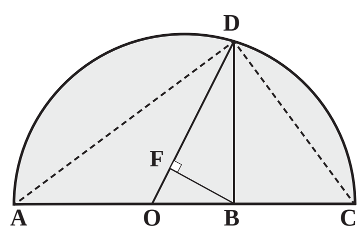
نکتهٔ ۴. (رابطه بین تعمیم جبری میانگین): در حالت کلی برای مقادیر $a_۱$، $a_۲$، ... و a_n که بزرگ‌تر از صفرند، می‌توان نوشت: (اثبات این نامساوی در منابع متعددی آمده است.)

$$\frac{a_۱+a_۲+...+a_n}{n}\ge\sqrt[n]{a_۱\cdot a_۲\cdot...\cdot a_n}\ge\frac{n}{\frac{۱}{a_۱}+\frac{۱}{a_۲}+...+\frac{۱}{a_n}}$$

تعبیر هندسی میانگین‌ها

در ادامه میانگین‌های فوق را به روش هندسی روی یک شکل تعبیر می‌کنیم.

دستورالعمل رسم شکل: نقطهٔ B را روی پاره‌خط AC اختیار کنید، به‌طوری که B وسط AC یعنی نقطهٔ O نباشد. در نقطهٔ B، عمودی بر AC اخراج کنید تا نیم‌دایرهٔ به قطر AC را در D قطع کند. فرض کنید که F پای عمود وارد از B بر OD است. حال از روی شکل می‌توانیم نشان دهیم:



اولاً، پاره‌خط‌های OD، BD و FD به‌ترتیب نمایش میانگین حسابی، میانگین هندسی و میانگین توافقی بین پاره‌خط‌های AB و BC هستند.

ثانیاً، اگر AB≠BC باشد، باید نشان دهیم رابطهٔ زیر بین این سه نوع میانگین وجود دارد:

میانگین حسابی > میانگین هندسی > میانگین توافقی

۱. میانگین توافقی (مخالف ـ هم‌ساز ـ هارمونیک)

اگر a و b مقدار عددی دو پاره‌خط دلخواه باشند، میانگین توافقی آن‌ها را با نماد H نمایش می‌دهیم. با توجه به روابط طولی در مثلث‌های قائم‌الزاویه، داریم:

$BD^۲=AB.BC$ و $BD^۲=DF.OD$ (چرا؟)

$$\Rightarrow FD=\frac{BD^۲}{OD}=\frac{AB.BC}{\frac{AC}{۲}}=\frac{AB.BC}{\frac{AB+BC}{۲}}=\frac{۲AB.BC}{AB+BC}$$

$$=\frac{۲}{\frac{AB+BC}{AB.BC}}=\frac{۲}{\frac{۱}{AB}+\frac{۱}{BC}}\Rightarrow$$

FD میانگین توافقی بین پاره‌خط‌های AB و BC است.

۲. میانگین هندسی

میانگین هندسی دو پاره‌خط، پاره‌خطی است که مربع اندازهٔ آن با حاصل‌ضرب اندازه‌های دو پاره‌خط مزبور مساوی باشد. یعنی اگر اعداد حقیقی مثبت a و b طول دو پاره‌خط باشند، میانگین هندسی آن‌ها را با حرف G نمایش می‌دهند و برابر است با: $G=\sqrt{a.b}$. باز هم با توجه به روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویهٔ BDO داریم:

$$BD^۲=DF.OD=\frac{AC}{۲}.\frac{۲}{\frac{۱}{AB}+\frac{۱}{BC}}$$

$$=\frac{\cancel{AB+BC}}{\cancel{۲}}.\frac{\cancel{۲}AB.BC}{\cancel{AB+BC}}$$

$$\Rightarrow BD^۲=AB.BC\Rightarrow BD=\sqrt{AB.BC}\Rightarrow$$

پاره‌خط BD میانگین هندسی بین پاره‌خط‌های AB و BC است.

۳. میانگین حسابی

اگر a و b دو عدد حقیقی مثبت باشند، به‌طوری‌که طول دو پاره‌خط دلخواه باشند، میانگین (معدل) آن‌ها را با نماد A نمایش می‌دهند و عبارت است از خارج‌قسمت مجموع آن‌ها تقسیم بر ۲؛ یعنی: $A=\frac{a+b}{۲}$

به‌سادگی می‌نویسیم:

$$OD=r=\frac{AC}{۲}=\frac{AB+BC}{۲}\Rightarrow$$

پاره‌خط OD میانگین حسابی بین دو پاره‌خط AB و BC است.

حال نابرابری میانگین‌ها را هم اثبات می‌کنیم:

اثبات: چون در مثلث FBD ضلع BD وتر مثلث است و طول هر ضلع مثلث قائم‌الزاویه از وتر کوچک‌تر است، پس داریم: FD<BD. همچنین، FD بخشی از پاره‌خط OD است، پس: FD<OD و داریم:

FD<BD<OD

$\Rightarrow$ میانگین حسابی > میانگین هندسی > میانگین توافقی